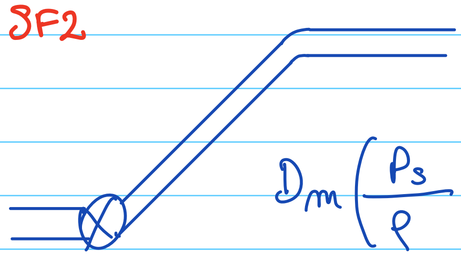
TD M3

SF1

cf cours.

SF2



Appliquons le théorème de Bernoulli entre l'entrée de la pompe et l'usine :

$$D_m\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{1}{2}v_s^2 + g z_s - \left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{1}{2}v_e^2 + g z_e\right)\right) = \mathcal{P}_i$$

On a $P_s = 2{,}5\ P_{atm}$, $P_e = P_{atm}$

$z_s - z_e = h = 10\ m$

La section étant constante et l'écoulement incompressible et stationnaire ;

$$v_e = v_s = \frac{D_v}{S}$$

On a donc

$$\boxed{\mathcal{P}_i = D_v\left(1{,}5\ P_{atm} + \rho g h\right)}$$

AN : $\mathcal{P}_i = \frac{7}{3600}\left(1{,}5\times10^5 + 10^3\times10\times10\right) = \underline{490\ W}$

SF3

cf cours.

SF4

1) Vrai, énergie massique
2) Faux : gz est une énergie massique mais $\frac{1}{2}\rho v^2$ une énergie volumique
3) Faux : Δp et $\frac{P}{\rho}$ dans la m̂ éqn
4) Vrai : homogène à une puissance
5) Faux : homogène MAIS il manque le ⊖ pour la perte de charge
6) Vrai : homogène à une puissance
7) Vrai : homogène à une pression (ou ē volumique)

Exercice 3 - Production d'énergie hydroélectrique

1) Cours

2) Le lac ayant une surface très grande devant celle de la conduite, on a $v_1 \ll v_2$.

On a par ailleurs $v_2 = \dfrac{Q_{vol}}{S} = \dfrac{4 Q_{vol}}{\pi D^2} = \underline{5\ m.s^{-1}}$

3) L'écoulement est incompressible et stationnaire. On peut donc appliquer le thm de Bernoulli
Comme on cherche la puissance maximale récupérable, on néglige les pertes de charge :

$$D_m\left[\left(\frac{P_{atm}}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 + g z_2\right) - \left(\frac{P_{atm}}{\rho} + 0 + g z_1\right)\right] = -\mathcal{P}$$

$$\mathcal{P} = \underbrace{\rho Q_{vol}}_{D_m} \left(g(z_1 - z_2) - \frac{v_2^2}{2}\right) = \underline{5{,}8\ MW}$$

4) La valeur est cohérente, la différence vient des pertes de charge

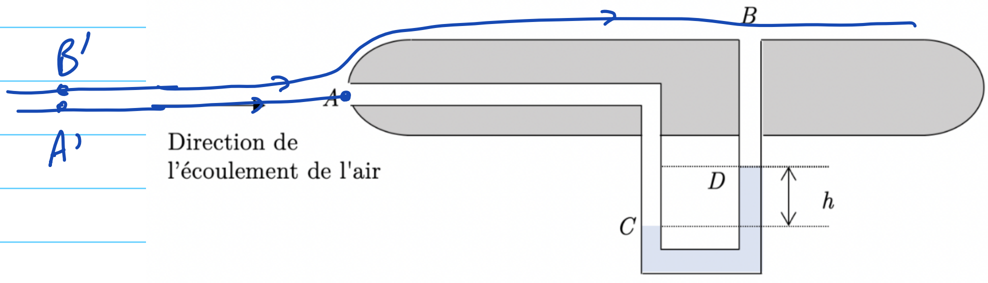
$$\mathcal{P}_{pertes} = \rho Q_{vol}\, g \Delta z_c = 0{,}4\, \mathcal{P}$$

Donc $\Delta z_c = 0{,}4 \times \dfrac{\mathcal{P}}{\rho g Q_{vol}} = \underline{9{,}5\ m}$

Tout se passe comme si l'écoulement était parfait, mais le lac 9,5 m plus bas.

Exercice 4 - Tube de Pitot

1)



Tube de Pitot

2) $v_A = 0$ d'où le nom "point d'arrêt"

L'écoulement étant parfait, $v_B = v_0$

3) En appliquant le thm de Bernoulli sur la ligne de courant passant par B :

$$\frac{P_0}{\rho_0} + \frac{v_0^2}{2} + \cancel{g z_{B'}} = \frac{P_B}{\rho_0} + \frac{v_B^2}{2} + \cancel{g z_B}$$

De m̂ sur la ldc A'A :

$v_A = 0$

$$\frac{P_0}{\rho_0} + \frac{v_0^2}{2} + \cancel{g z_{A'}} = \frac{P_A}{\rho_0} + \cancel{\frac{v_A^2}{2}} + \cancel{g z_A}$$

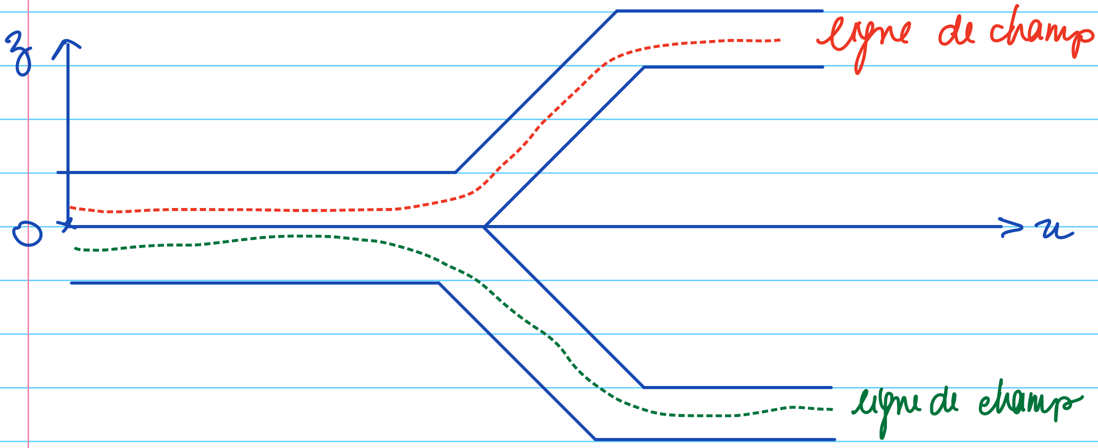
en combinant : $\frac{P_A}{\rho_0} = \frac{P_B}{\rho_0} + \frac{v_0^2}{2}$

A l'intérieur du tube, le fluide est statique. Pour le gaz on peut donc supposer que $P_A = P_C$ et $P_B = P_D$

De la relation de la statique, on a $P_C - P_D = \rho_\ell g h$

Au final $\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2 \rho_\ell g h}{\rho_0}}} = \underline{63\ m s^{-1}}$

Exercice 5 - Fourche hydraulique



① La conservation du débit donne $v_0 S_0 = v_1 S_1 + v_2 S_2$

i.e. $2v_0 = v_1 + v_2$

② Sur la ligne de champ rouge, on a

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} + g \times 0 = \frac{P_{atm}}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g\frac{h}{2} \qquad (1)$$

et sur la ligne de champ verte :

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} + g \times 0 = \frac{P_{atm}}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} - g\frac{h}{2} \qquad (2)$$

On soustrait (1) et (2) : $v_2^2 - v_1^2 = 2gh$

③ On résout donc $\begin{cases} v_2^2 - v_1^2 = 2gh \\ v_2 + v_1 = 2v_0 \end{cases}$

On peut résoudre "classiquement" en exprimant v_2 en fonction de v_1 puis en réinjectant, ou $v_2^2 - v_1^2 = (v_2 - v_1)(v_2 + v_1)$

On a donc $\begin{cases} v_2 - v_1 = \frac{2gh}{v_0} \\ v_2 + v_1 = 2v_0 \end{cases}$ i.e. $\boxed{\begin{aligned} v_1 &= \left(1 - \frac{gh}{2v_0^2}\right) v_0 \\ v_2 &= \left(1 + \frac{gh}{2v_0^2}\right) v_0. \end{aligned}}$

Exercice 6 - Filet d'eau

1) $\eta_{eau} = 10^{-3}$ Pl

Calculons le nombre de Reynolds pour déterminer la nature de l'écoulement :

$$Re = \frac{l \rho v}{\eta} \qquad \text{avec ici } l = 2r_0 \text{ et } v = \frac{D}{S} = \frac{D}{\pi r_0^2}$$

A.N : $$Re = \frac{2 \times \cancel{1.10^{-2}} \times 10^3 \times 0,2.\cancel{10^{-3}}}{\pi (1.10^{-2})^{\cancel{2}} \times 1,0.\cancel{10^{-3}}} = \frac{0,4}{\pi} 10^5 = \underline{13.10^3}$$

L'écoulement est donc <u>turbulent</u>

2) On peut supposer l'écoulement parfait (viscosité négligeable), stationnaire (d'après l'énoncé), incompressible (hypothèse raisonnable pour de l'eau)

Le filet d'eau est un tube de courant. On a donc conservation du débit volumique :

$$\pi r_0^2 v_0 = \pi r^2(z) v(z) \qquad \text{avec } v_0 = \frac{D}{\pi r_0^2}$$

Appliquons le théorème de Bernoulli sur une ligne de champ entre la sortie du robinet et une altitude z :

$$\frac{P(z)}{\rho} + \frac{v^2(z)}{2} + gz = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2}$$

La pression étant uniforme et égale à Patm, on a

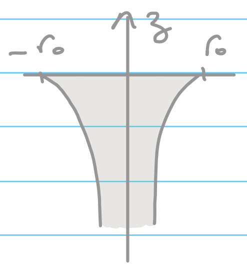
$$\frac{v^2(z)}{2} + gz = \frac{v_0^2}{2}$$

or $v(z) = \left(\frac{r_0}{r(z)}\right)^2 v_0$, donc : $\left(\frac{r_0}{r(z)}\right)^4 \times \frac{v_0^2}{2} + gz = \frac{v_0^2}{2}$

ie $$z(r) = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4\right) = \frac{D^2}{2\pi^2 r_0^4 g}\left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4\right)$$

$$\boxed{z(r) = \frac{D^2}{2\pi^2 g}\left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4}\right)}$$

Rq : en traçant, on obtient :



Exercice 7 - Eolienne

1) La conservation du débit volumique sur un tube de courant pour un écoulement stationnaire et incompressible donne

$$Q_v = S_A v_A = S_B v_B = S v$$

2) Appliquons le thm de Bernoulli sur la ldc suivant l'axe x entre S_A et E_1 :

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2}$$

or $P_A = P^\circ$, donc $\boxed{P_1 = P^\circ + \frac{\rho}{2}\left(v_A^2 - v^2\right)}$

De la m̂ manière : $\boxed{P_2 = P^\circ + \frac{\rho}{2}\left(v_B^2 - v^2\right)}$

3) Appliquons la relation généralisée de Bernoulli au système compris entre S_A et S_B (écoulement incompressible)

$$D_m\left(\frac{P_B}{\rho} + \frac{1}{2}v_B^2 - \left(\frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2\right)\right) = \mathcal{P}_{eol}$$

or $P_B = P_A = P^\circ$, donc

$$\mathcal{P}_{éol} = \frac{D_m}{2}\left(v_B^2 - v_A^2\right) = \underline{\frac{\rho S v}{2}\left(v_B^2 - v_A^2\right)}$$

Exercice 8 - Ecoulement fluvial ou torrentiel

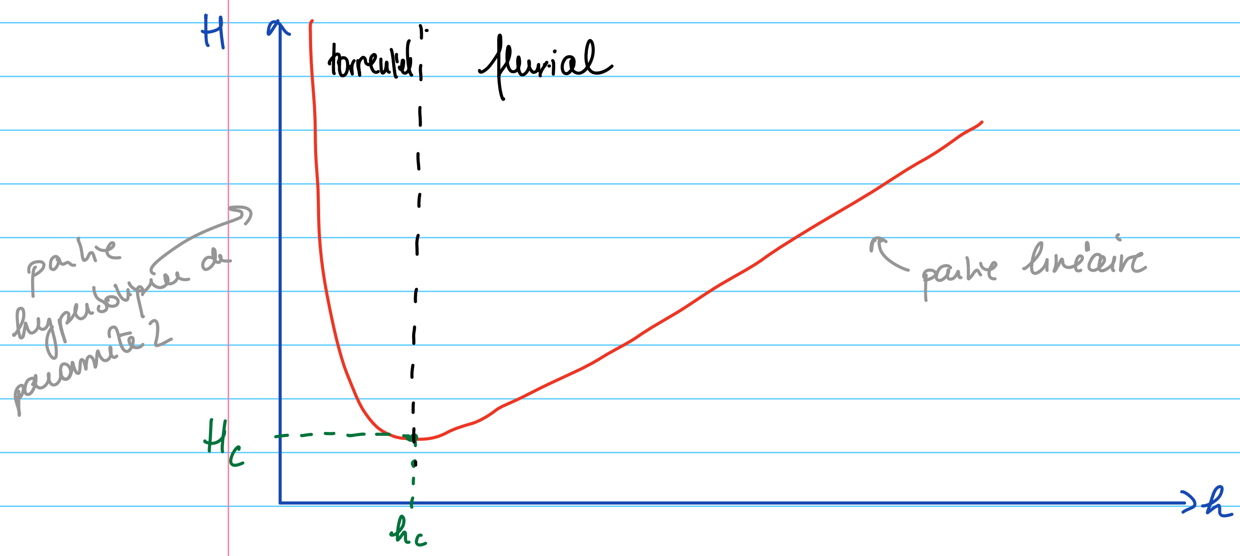
1) L'interface fluide/air peut être considérée comme une ligne de champ.
Ainsi, $\forall x$, $\frac{P_{atm}}{\rho} + g h(x) + \frac{v^2(x)}{2} = cte$.

$\frac{P_{atm}}{\rho}$ étant constante, on a donc bien $h(x) + \frac{v^2(x)}{2g} = cte$

car v uniforme sur S

2) On a $Q = vS = v\,h(x)\,B$ ie $v = \frac{Q}{h(x)B}$

Donc $\boxed{H = h(x) + \frac{Q^2}{2h^2(x)B^2 g}}$



Quand h très petit, on a $\frac{Q^2}{2h^2B^2g} \gg h$

Donc $H \simeq \frac{Q^2}{2h^2B^2g}$ → partie hyperbolique de paramètre 2

Si h est très grand, on a $h \gg \frac{Q^2}{2h^2B^2g}$

Donc $H \simeq h$ → partie linéaire.

On voit sur la courbe (tracée à Q fixé), qu'il existe toujours 2 antécédents pour une charge spécifique donnée (tant qu'elle est supérieure à H_c)

Soit h' et h'' les deux solutions à $H(h) = H_0$ avec $h' < h''$

Q étant fixé, on a $v'h'B = v''h''B$

ie $\frac{v'}{v''} = \frac{h''}{h'} > 1$

Ainsi pour (h', v') la hauteur d'eau est faible mais la vitesse grande
et pour (h'', v'') " " grande mais la vitesse faible.
Cela correspond à des écoulements respectivement torrentiels et fluviaux.

3) Calculons h_c la hauteur d'eau pour laquelle H est minimale

$$\frac{dH}{dh} = 1 - \frac{2Q^2}{2h^3B^2g}$$

On a donc $1 - \frac{Q^2}{h_c^3 B^2 g} = 0$ ie $\boxed{h_c = \left(\frac{Q}{B}\right)^{2/3} \times \frac{1}{g^{1/3}}}$

On a par ailleurs $Q = v_c h_c B$

Donc $v_c = \frac{Q}{h_c B} = \frac{Q}{B} \times \left(\frac{Q}{B}\right)^{-2/3} g^{1/3} = \underline{\left(\frac{Q}{B} g\right)^{1/3}}$

Au final $H_c = \left(\frac{Q}{B}\right)^{2/3} \times \frac{1}{g^{1/3}} + \frac{Q^2 g^{2/3}}{2\left(\frac{Q}{B}\right)^{4/3} B^2 g}$

$$H_c = \left(\frac{Q^2}{B^2 g}\right)^{1/3} + \frac{Q^{2/3}}{2B^{2/3}g^{1/3}} = \underline{\frac{3}{2}\left(\frac{Q^2}{B^2 g}\right)^{1/3}}$$

4) Si $H = H_0$, on a $H_0 = h + \frac{Q^2}{2B^2h^2g}$

ie $Q = \sqrt{2(H_0 - h)B^2h^2g} = Bh\sqrt{2(H_0-h)g}$

Pour tracer l'allure, déterminons le tableau de variation

$$\frac{dQ}{dh} = B\sqrt{2(H_0-h)g} + Bh\,\frac{1}{2}\,\frac{-2g}{\sqrt{2(H_0-h)g}}$$

$$\frac{dQ}{dh} = B\,\frac{2(H_0-h)g - hg}{\sqrt{2(H_0-h)g}} = B\sqrt{g}\,\frac{2H_0-3h}{\sqrt{2(H_0-h)}}$$

On a donc $\frac{dQ}{dh} > 0$ si $2H_0 - 3h > 0$

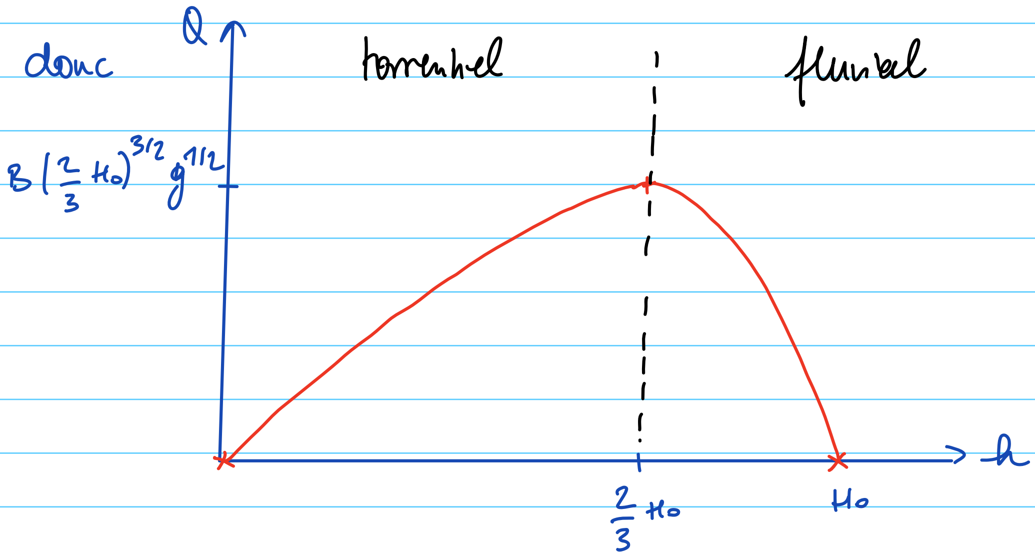
ie $h < \frac{2}{3}H_0$

h	0		$\frac{2}{3}H_0$		H_0
$Q(h)$		$\nearrow$	$B\left(\frac{2}{3}H_0\right)^{3/2} g^{1/2}$	$\searrow$	0

en effet $Q\left(\frac{2}{3}H_0\right) = B\,\frac{2}{3}H_0\sqrt{2\left(H_0-\frac{2}{3}H_0\right)g}$

$$= B\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} H_0^{3/2}\, g^{1/2}$$

On a donc

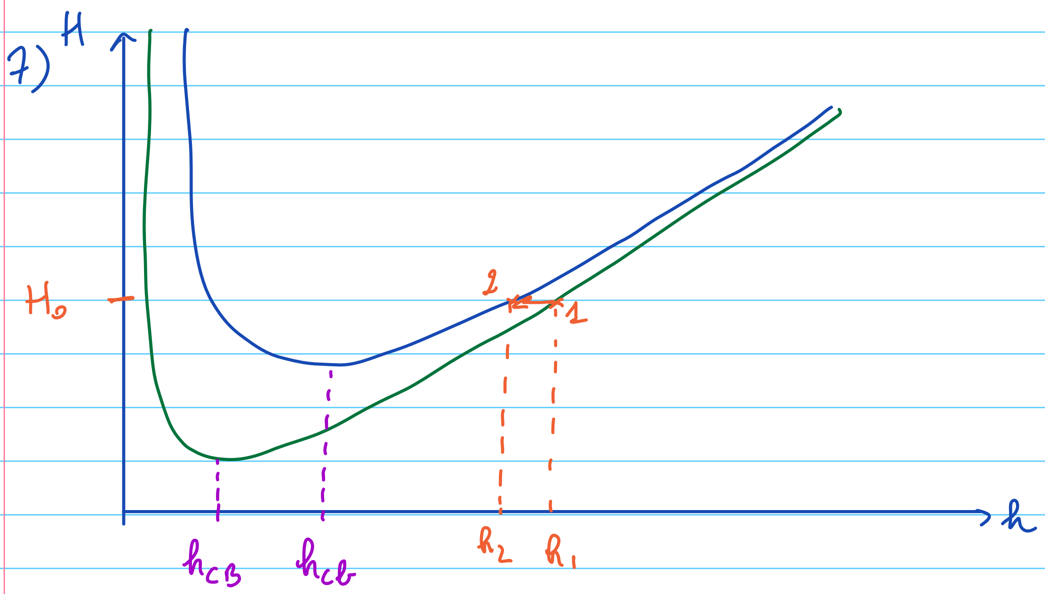


La zone torrentiel correspond à des petites hauteurs d'eau
fluvial " " grandes " " .

5) Le canal d'approche permet d'obtenir un écoulement stationnaire.

6) $Q = v_1 B h_1 = v_2(x)\, b\, h_2(x)$ car le débit volumique se conserve, l'écoulement étant incompressible et stationnaire.

7)



La courbe bleue est celle associé à $H_b(h)$ car le minimum est plus grand que celui de la courbe verte.

Or $H_c = \left(\frac{Q}{B}\right)^{2/3} \times \frac{1}{g^{1/3}} \times \frac{2}{3}$ ainsi, plus le canal est large, plus le minimum est petit.

Le passage $1 \to 2$ a lieu dans la zone d'écoulement fluvial, de la courbe verte vers la courbe bleue.

On aura donc $(h_2 - h_1) < 0$

et $(v_2 - v_1) > 0$ car v est inversement proportionnel à h.

Calculons Q :

$Q = b\, h_2 \sqrt{2(H_0 - h_2)g}$

Si $v_2 \gg v_1$ alors $h_1 \gg h_2$, donc on peut simplifier

$H_0 = h_1$ en effet h_2 est déjà dans l'intervalle d'écoulement fluvial, donc $h_2 > h_{c?} > h_{cB}$

on a donc $h_1 \gg h_{cB}$ et alors $\frac{Q}{2h_1^2 B^2 g} \ll h_1$

Au final $\boxed{Q = b h_2 \sqrt{2(h_1 - h_2) g}}$.

autre approche : $h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g}$

$$h_1 - h_2 = \frac{1}{2g}(v_2^2 - v_1^2) \simeq \frac{1}{2g} v_2^2 \quad \text{car } v_2 \gg v_1$$

ie $v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$

et $Q = v_2 h_2 b = b h_2 \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$:)

8) Etant donné que le régime critique est atteint, on a nécessairement

d'après la question 3 : $H = H_c = \frac{3}{2}\left(\frac{Q^2}{b^2 g}\right)^{1/3}$

Par ailleurs

$$H = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} \simeq h_1 \quad \text{car } v_1 \ll \sqrt{2gh_1}$$

Ainsi, $h_1 = \left(\frac{Q}{b}\right)^{2/3} \times \frac{1}{g^{1/3}} \times \frac{3}{2}$ ie $\boxed{Q = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} b\sqrt{g}\, h_1^{3/2}}$

9) Pour un jaugeur noyé, il faut mesurer h_1 et h_2, donc on a 2 sources d'incertitudes. Par ailleurs, $h_2 - h_1$ est très faible et donc l'incertitude relative sera plus grande que celle de mesure sur h_1 et h_2

Au contraire, pour un jaugeur dénoyé, il n'y a qu'une mesure à faire (h_1) et l'incertitude relative sera plus petite que celle sur $h_2 - h_1$.